# лабораторнАЯ работА №50

# «квазипериодическиЕ сигналЫ

# С АНГАРМОНИЗМОМ ОБЕРТОНОВ»

# по дисциплинам «Автоматизированные системы контроля и управления радиоэлектронными средствами» и «Теория колебаний»

Авторы работы: **Белов Л.А., Семёнов Н.С., Первеева Н.С.**

# ЦелЬ работы

1. Ознакомиться со свойствами и характеристиками квазипериодических сигналов несинусоидальной формы, которые формируются в высокодобротных колебательных системах с распределёнными параметрами [1].

2. Измерить значения эквивалентной добротности колебательной системы   
в виде музыкальной струны.

3. Познакомиться с проявлением ангармонизма обертонов в колебаниях распределенной высокодобротной колебательной системы.

4. Выполнить оценку значения параметра ангармонизма при помощи кепстрального анализа предыскаженного сигнала с частотной модуляцией.

# Теоретическое введение

Сигналом называют физический процесс, несущий информацию   
или предназначенный для её передачи. По **частоте** **несущего колебания** различают сигналы звукового, ультразвукового, радиочастотного и других диапазонов.   
По **виду среды возникновения** рассматривают электромагнитные колебания   
в вакууме или воздушной среде; акустические колебания плотности в воздушной среде; упругие колебания в механической среде; поверхностные акустические волны   
в диэлектрике с пьезоэффектом [8]. По соотношению реактивной колебательной мощности и активных потерь свободных колебаний выделяют **высокодобротные** системы (например, кварцевые или диэлектрические резонаторы) и **диссипативные** системы с апериодическим процессом свободного затухания. По соотношению протяжённости**колебательной системы**и**длины, возникающих в ней волн** – система с **сосредоточенными** параметрами (например, маятник, *LC*-контур)   
или с **распределёнными** параметрами (музыкальные инструменты, объёмные резонаторы, лазеры, некоторые архитектурные сооружения). **Квазипериодическими**называютсигналы с медленно изменяющейся   
на протяжении процесса затухания формой колебания, что соответствует множеству сосредоточенных частотных полос вблизи гармоник (обертонов) основного тона.

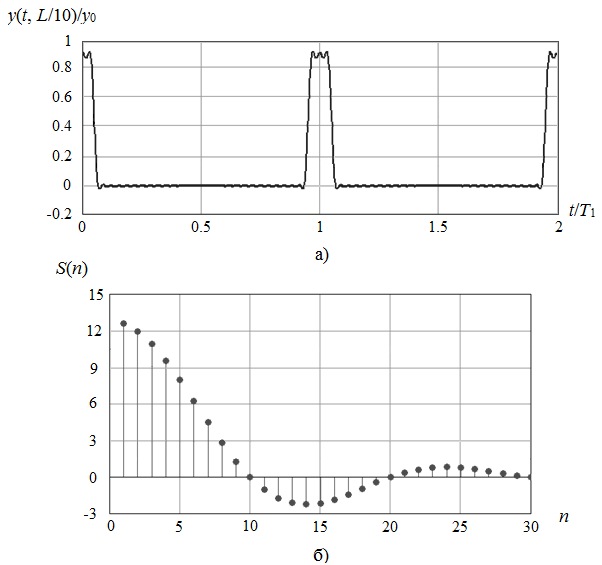
Среди этого многообразия акустические музыкальные сигналы, которые возникают, в частности, в высокодобротной тонкой и гибкой струне, натянутой между опорами, характеризуются как колебания в высокодобротной распределённой механической системе с упругими свойствами, которые преобразуются в ощущения человека при помощи его слуховых рецепторов   
или в электрические квазипериодические колебания при помощи микрофонов. Частоту повторения такого сигнала *f*1 называют высотой **основного тона**,   
а высшие гармоники **–** **обертонами**.

В данной работе рассмотрены звуковые сигналы на примере колебаний упругой струны музыкального инструмента. Музыкальная струна является высокодобротной сверхширокополосной упругой колебательной системой   
с распределёнными параметрами [2, 3]. После ударного возбуждения струны (например, в акустической гитаре или фортепиано), возникают свободные затухающие квазипериодические колебания несинусоидальной формы, которые воспринимаются слухом человека как специфический тембр такого инструмента [7]. При возбуждении струны при помощи смычка за счёт различия сил трения скольжения и покоя (в скрипке, виолончели, контрабасе и др.) возникают незатухающие колебания несинусоидальной формы, которые в спектральном плане включают в себя, кроме основного тона до нескольких десятков обертонов сравнимого уровня.

В упрощающих предположениях о том, что струна длиной *L* предельно тонкая, гибкая, обладает коэффициентом упругости *a* (отношением натяжения струны к её плотности) и подчиняется закону упругости Гука, установлено [5],   
что после отклонения её точки на расстоянии *x*0 от точки опоры на растояние *у*0   
от положения равновесия, в струне возникают поперечные смещения во времени *t* произвольной точки *y*(*x*,*t*), которые описываются одномерным волновым уравнением второго порядка в частных производных   
, где – параметр активных потерь, – частота основного тона; *Q* – эквивалентная добротность колебательной системы. Собственное решение этого уравнения с учётом граничных условий *y*(0) = *y*(*L*) = 0 можно представить в виде бесконечной суммы ряда частных решений по гармоникам (обертонам):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – амплитуды спектральных компонент;   
*τ*(*n*) = *Q*/(π*nf*1) – постоянная времени затухания колебаний. По (1) половина длины волны колебания каждого обертона с частотой *fn* целое число раз *n* ⊆ (1…∞) укладывается в длине струны *L*. При учёте затухания эквивалентная добротность *Q* характеризует процесс в целом, а постоянная времени затухания обертона *τ*(*n*) уменьшается с ростом его номера *n*, что отражается введением в (1) дополнительного множителя exp [− *t*/*τ*(*n*)] под знаком суммы. Пример формы сигнала *y*(*t*, *x*)/*y*0 и его амплитудного спектра *S*(*n*) по (1) для выбранной точки возбуждения и точки расположения звукоснимателя показан [1] на рис.1.



**Рисунок 1 – Форма колебания *y*(*t*, *L*/10)/*y*0 (а) и амплитудный спектр *S*(*n*) (б) в линейном масштабе по ординатам для струны, возбуждённой в точке *х*0 = 0,025*L*, *n* = 1, 2,…, 30 - номер обертона без ангармонизма**

Для вычислительной обработки и оценки параметров сигнала вместо непрерывного спектрального представления (1) используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ), в котором процесс (1) вместо непрерывного времени *t* представляется дискретными отсчётами в равноотстоящие моменты времени   
с частотой дискретизации, превышающей более чем в два раза частоту наиболее быстрой из учтённых гармоник *fn*.

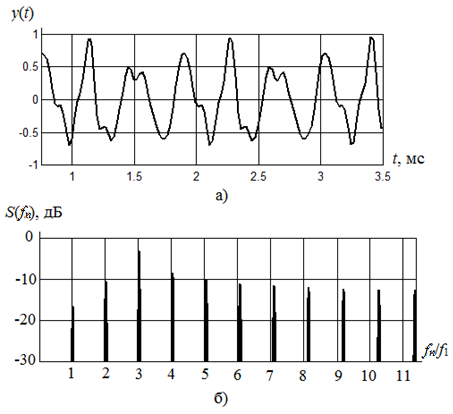
По амплитудному спектру сигнала целиком невозможно судить о динамике его развития во времени, так как общее преобразование Фурье на бесконечном отрезке времени не даёт возможности контролировать изменение спектрального состава в процессе затухания. Поэтому в работе используется двумерное текущее дискретное преобразование [4], в котором в состав прямого интегрального преобразования вводится весовая оконная функция. Такой спектральный анализ менее ресурсоемкий, чем процедура спектрального разложения цельного дискретного сигнала большой продолжительности. При помощи окна будет выделяться фрагмент реального сигнала в увеличенном масштабе, по которому будут производиться измерения. Это явление называют ангармонизмом обертонов [2, 3] или спектральной ангармоничностью [6].

Форма сигнала колебаний струны *y*(*t*) и на выходе звукоснимателя его спектр могут отличаться от показанных на рисунке 1 за счёт малых отличий свойств материала от идеализаций, принятых при выводе уравнения (1), затухания свободных колебаний, конкретного сочетания параметров и упругих свойств материала, длины струны, приводящих к дисперсии фазовой скорости   
для обертонов. На рисунке 2 вид пример записанного звучания фортепианной струны на протяжении двух квазипериодов.

Из рассмотрения рисунка 2,б) видно, что положения максимумов спектральной плотности мощности высших гармоник прогрессивно смещаются   
по отношению к целым значениям частоты основного тона *f*1, что означает наличие ангармонизма обертонов. Спектральная ангармоничность колебаний струны удовлетворительно описывается формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где *B* – коэффициент ангармоничности, который определяется радиусом, натяжением и длиной стальной струны.



**Рисунок 2 – Фрагмент временной реализации (а) и спектр мощности в логарифмическом масштабе по ординатам (б) для сигнала с проявлением ангармонизма**

При *B* = 0 формула (2) будет соответствовать

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

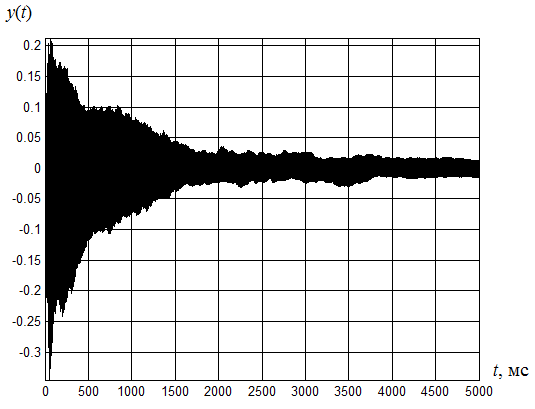
Явление ангармонизма обертонов в пределах величин, свойственных реальным струнам музыкальных инструментов, нельзя выявить, а тем более оценить по спектрограмме или осциллограмме реального звука музыкального инструмента – это ***скрытый параметр***.

# Методика измерения и оценки характеристик

Для исследуемой колебательной системы в данной работе проведена **оценкаэквивалентной добротности *Q* колебаний** с целью определения количества периодов несущего колебания для свободно затухающих колебаний.

Эквивалентная добротность *Q* является величиной, равной количеству полных периодов колебаний, соответствующих уменьшению амплитуды в еπ ≈ 20 раз.

Оценка *Q* будет проводиться на основе оцифрованных записей свободного звучания струн после их ударного возбуждения. На рисунке 3 представлен вид временной реализации звукового сигнала с частотой основного тона *f*1 = 98 Гц.



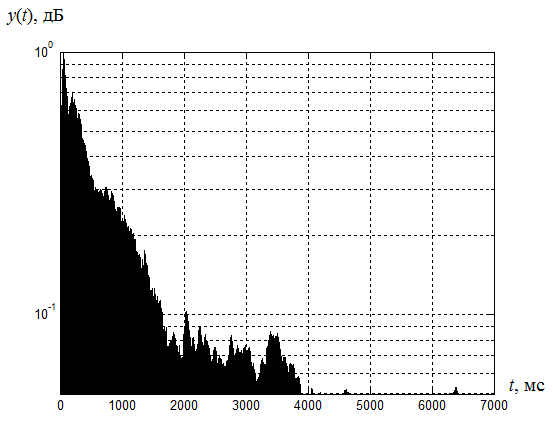
**Рисунок 3 – Вид временной реализации звукового сигнала с частотой основного тона *f*1 = 98 Гц**

В связи с различием положительных и отрицательных отклонений от нуля   
на временной реализации, максимальное значение абсолютной величины полуразмаха колебаний проведена нормировка к единице по оси ординат.   
Для удобства по оси ординат использован логарифмический масштаб (рисунок 4).

Эквивалентная добротность колебательной системы оценивается   
по осциллограмме на основе соотношения

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4) |

В формуле (4) Δ = (*t*2 – *t*1) – время затухания, *t*1 – момент времени, где амплитуда колебания имеет максимальное значение, *t*2 – момент времени, где амплитуда колебания уменьшилась в 20 раз; *T*1 = 1/*f*1– период основного тона.

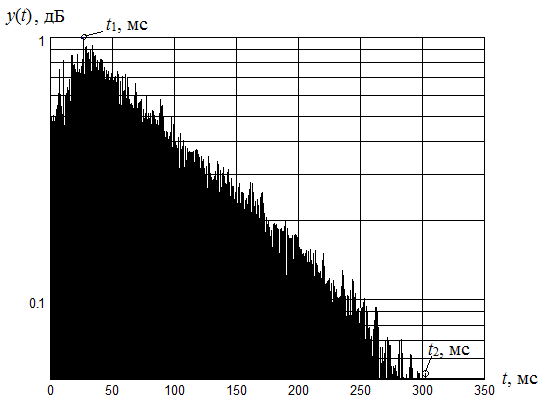


**Рисунок 4 – Нормированный график изменения огибающей звукового сигнала во времени с логарифмическим масштабом по оси ординат для частоты основного тона *f*1 = 98 Гц**

Вычисление периода основного тона *T*1 производить на временной реализации. Т.к. в работе рассматриваются квазипериодические колебания,   
то рекомендуется измерить несколько периодов на выбранном фрагменте сигнала   
и найти среднеарифметическое значение.

Измерения величин *t*1 и *t*2 следует проводить (рисунок 5) на временных реализациях сложного сигнала, которые соответствует оцифрованной записи звучания струн рояля.

В работе будет произведены измерения **коэффициента ангармоничности обертонов *В*** по оцифрованной записи квазипериодического сверхширокополосного сигнала при использовании известного в теории радиотехнических сигналов гомоморфного преобразования под названием **кепстрального анализа** [2 - 4]. Этот метод использует повторное прямое преобразование Фурье от логарифма спектра Фурье мощности исходного сигнала.



**Рисунок 5 – Нормированная временная реализация сигнала с частотой основного тона *f*1 = 880 Гц   
и логарифмическим масштабом по оси ординат**

Термин «кепстр» получен свободной инверсией слова «спектр». Подобная перестановка букв присутствует также для терминов «период» → «репиод»   
и «частота» → «сачтота».

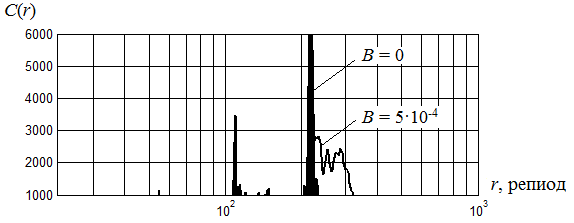
Принято брать натуральный логарифмот модуля спектра. Логарифмирование необходимо для того, чтобы выявить малые составляющие амплитудного спектра.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

где***S***(*f*) – спектр непрерывного сигнала, *q* – сачтота (первая буква слова «*quefrency*»).

Аргумент *q* имеет размерность времени, а не частоты. Хотя *q* имеет размерность времени, это особое, кепстральное время, поскольку *C*(*q*) в любой момент *q* зависит от функции *y*(*t*).

Определяемый выражением (5) кепстр принято называть **кепстром мощности**. Рисунок 6 демонстрирует вид кепстра сигнала с частотой основного тона *f*1 = 220 Гц при двух значениях коэффициента ангармоничности обертонов.   
По оси абсцисс на логарифмической шкале взята инверсия сачтоты 1/*q* = *r*,   
где *r* – репиод (первая буква термина «*repiod*»).



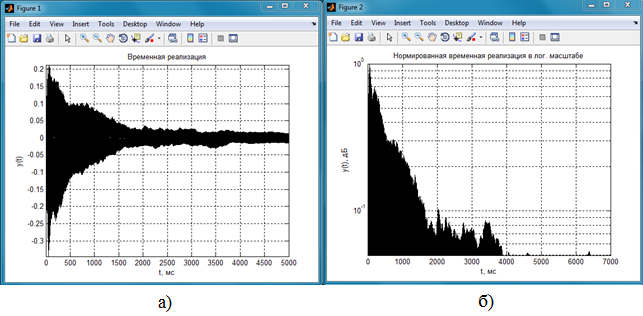
**Рисунок 6 – Вид кепстра мощности**

Кепстр мощности получили распространение при анализе сигналов, представляющих собой свертку двух функций времени, таких, что после преобразования *y*(*t*) по алгоритму (5) образуются неперекрывающиеся на оси *q* импульсы. В подобной ситуации фазовый спектр составных функций, образующих свертку, может не приниматься во внимание.

# Экранный интерфейс

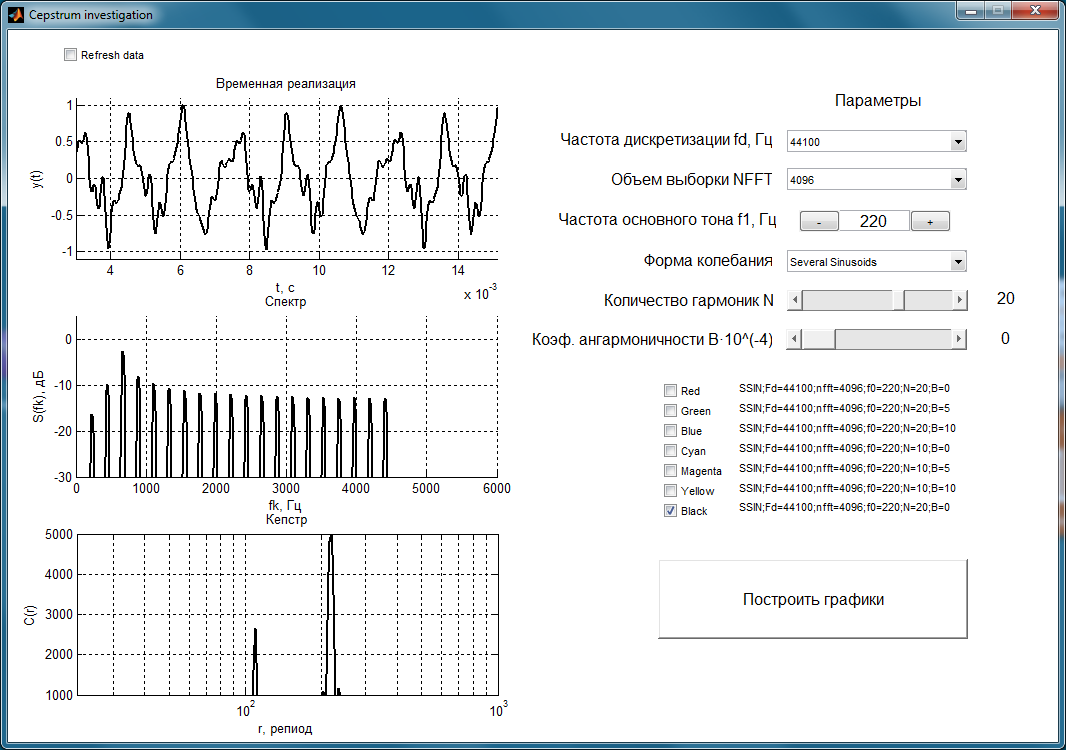
Для **оценки параметра *Q*** используется алгоритм **Q.m**, написанный   
в прикладном пакете программ MATLAB, при запуске которого на экране компьютера появляется 2 окна (рисунок 7).

При помощи кнопки увеличения масштаба  и курсора  измерьте значение периода на временной реализации (рисунок 7 а) и величины *t*1, *t*2   
на нормированной реализации в логарифмическом масштабе (рисунок 7 б).



**Рисунок 7 – Окна, появляющиеся при запуске программы Q.m: а) временная реализация; б) нормированная временная реализация в логарифмическом масштабе**

Рассмотрим **явление ангармонизма** при помощи алгоритма **Cepstrum\_test.m** (рисунок 8) в папке «**Cepstrum\_test**».



**Рисунок 8 – Экранный интерфейс алгоритма Cepstrum\_test.m**

На экранном интерфейсе можно менять значения параметров:

* «Частота дискретизации fd, Гц» от 8 кГц до 192 кГц;
* «Объем выборки NFFT» от 512 до 24576;
* «Частота основного тона f1, Гц» в соответствие с частотой звука;
* «Форма колебания» – сумма синусоид, нормированная к единичной общей амплитуде со случайным распределением фаз; пила/колебание треугольной формы; меандр (прямоугольный импульсный сигнал);
* «Количество гармоник N» от 0 до 30;
* «Коэф. ангармоничности В·10^(-4)» от 0 до 10.

При запуске алгоритма параметры имеют заданные значения:

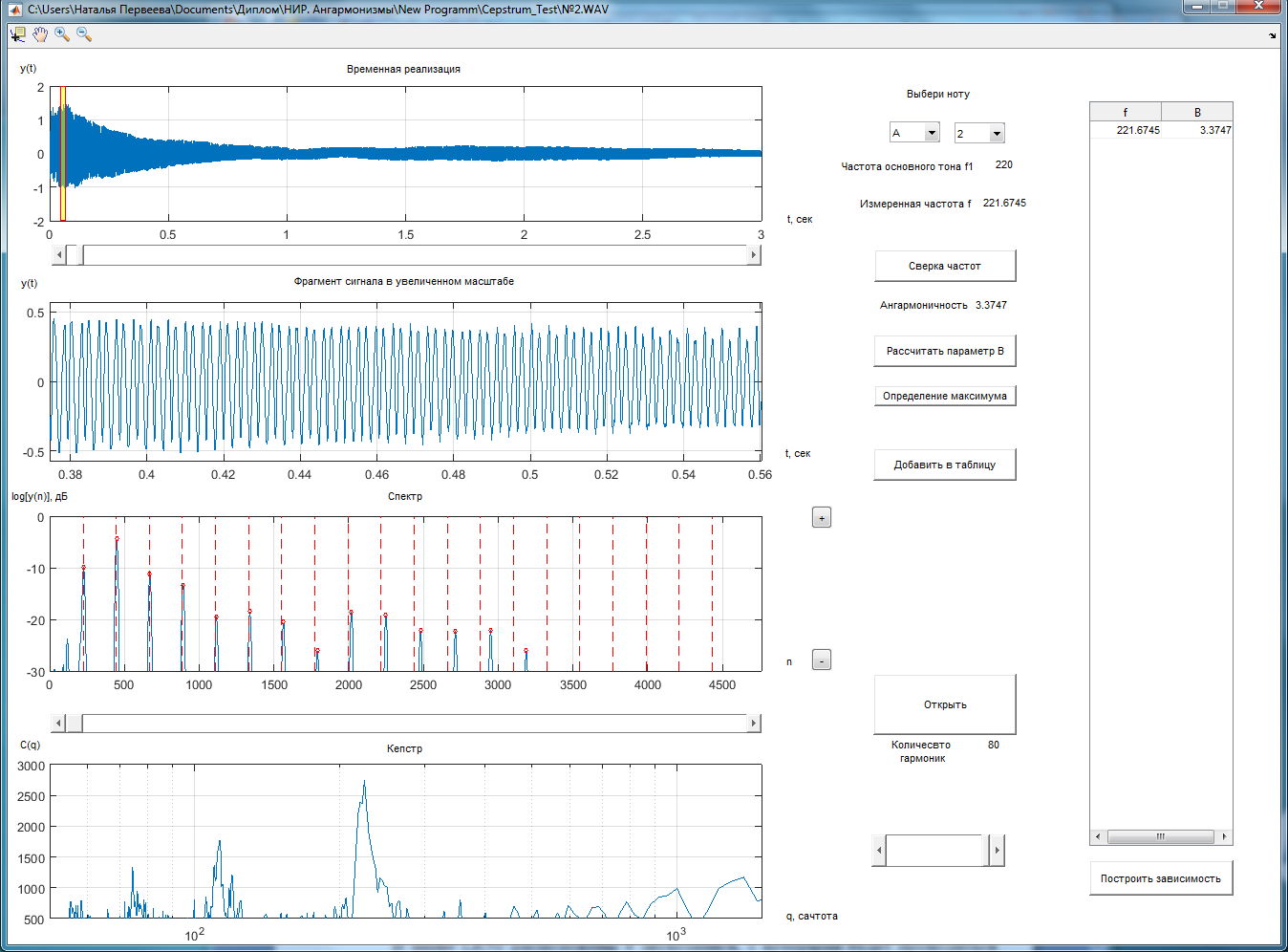
* Частота дискретизации fd, Гц = 44100;
* Объем выборки NFFT = 4096;
* Частота основного тона f1, Гц = 220;
* Форма колебания = Several Sinusoids (сумма синусоид);
* Количество гармоник N = 20;
* Коэф. ангармоничности B·10^(-4) = 0.

На графике «Кепстр» для удобства анализа на оси абсцисс была сделана инверсия – низкие частоты соответствуют правой области зависимости, а верхние частоты – левой области графика.

Для **оценки коэффициента ангармоничности обертонов** ***В*** применен алгоритм **test.m** (рисунок 9), расположенный в папке «**Inharmonisity**».

***Порядок работы с алгоритмом:***

1. Открыть нужный файл, нажав на кнопку «Открыть»;
2. Согласовать название звука из файла с нотой в соответствующем меню;
3. Выбрать область обзора, перемещая мышкой окно, для выделения наиболее удобного для анализа спектра;
4. Возможно изменить размер анализируемой области: для этого нужно навести курсор мыши на окно, нажать на него левой кнопкой   
   и при помощи колесика на мыши увеличить или уменьшить;



**Рисунок 9 – Экранный интерфейс алгоритма test.m**

1. Произвести сверку частот, используя кнопку «Сверка частот»   
   (для наглядности нажатие на эту кнопку добавляет на спектр отметки гармоник, кратных первой, тем самым можно наблюдать на высших гармониках некратность);
2. Кнопка «Рассчитать коэффициент В» вычисляет коэффициент ангармоничности обертонов *B*·10-4;
3. Для сохранения полученных данных о частоте и коэффициенте ангармоничности нажать кнопку «Добавить в таблицу»;
4. После накопления достаточного количества точек можно вывести   
   в отдельном окне зависимость *B*(*f*и).

# Выполняется в лаборатории

В папке LR50 расположены 4 звукозаписи, с которыми будет проводиться работа.

**1. Оценка параметра *Q*:**

* 1. Запустите программный пакет MATLAB. Установите текущую директорию C:\MATLAB\LR50.
  2. Откройте файл Q.m, задайте в первой строке запись № 1 и запустите алгоритм, нажав на клавишу F5.
  3. В первом окне с временной реализацией измерьте период *T*1. Во втором окне измерьте значения моментов времени в начале свободных затуханий колебания и по окончании переходного процесса *t*1, *t*2. Занесите значения   
     в таблицу 1 отчета.
  4. Выполните пункты 1.2 – 1.3 для остальных записей. Занесите полученные значения в таблицу 1 отчета.
  5. Закройте файл Q.m.

1. **Оценка коэффициента ангармоничности *В*:**
   1. Откройте файл Cepstrum\_test.m в папке «Cepstrum\_test» и запустите алгоритм, нажав на клавишу F5.
   2. Смоделируйте квазипериодическое колебание несинусодиальной формы. Для этого нажмите кнопку «Построить графики». Занесите в отчет полученные зависимости.
   3. Посмотрите, как изменятся спектр и кепстр при увеличении значения коэффициента ангармоничности обертонов *В*, приняв *В*1 = 5·10-4  
      и *В*2 = 10·10-4. Занесите графики в отчет.
   4. Повторите пункты 2.2 – 2.3 для количества гармоник **N** = 10. Занесите полученные зависимости в отчет.
   5. Сделайте выводы по полученным результатам.
   6. Закройте файл Cepstrum\_test.m.
   7. Откройте файл test.m в папке «Inharmonisity» и запустите алгоритм, нажав на клавишу F5.
   8. При помощи кнопки «Открыть» выберете запись № 1.
   9. Перемещая окно по временной реализации, найдите место,   
      где зависимость от времени имеет минимальное искажение и проведите сверку частоты. Помимо этого, можно увеличить или уменьшить размер анализируемой области для достижения величины измеренной частоты близкой по значению к заданной частоте основного тона. **Учтите**, что при слишком большой или маленькой области анализа программа дольше проводит сверку частот.
   10. Рассчитайте значение коэффициента ангармоничности обертонов *B*·10-4. Значение измеренной частоты и коэффициента *В* добавьте в таблицу окна.
   11. По пунктам 2.8 – 2.9 проделайте то же самое для остальных записей.
   12. Занесите в таблицу 3 отчета полученные данные из таблицы окна   
       об измеренной частоте и коэффициенте ангармоничности обертонов.
   13. Закройте файл test.m. Закройте приложение MATLAB.

# Обработка и представление результатов измерений

**Оценка параметра *Q*.**

Таблица 1 – Оценка эквивалентной добротности колебательной системы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Запись № | *T*1, мс | *t*1, мс | *t*2, мс | *Q* |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

1. Используя вычислительные программы, рассчитайте добротность *Q*   
   по формуле (4) для каждой записи и запишите полученные величины   
   в таблицу 1 отчета.
2. Определите частоту основного тона по измеренному значению *T*1. Запишите полученную величину в таблицу 2 отчета.

Таблица 2 – Определение частоты основного тона

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Запись № | Частота основного тона *f*1, Гц | Наименование звука |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. Определите звук по частоте основного тона и запишите в таблицу 2 отчета его наименование согласно научной нотации.
2. Постройте зависимость *Q*(*f*1), обозначьте точки значений. Зависимость постройте в двух масштабах: в линейном и с логарифмической шкалой   
   по оси ординат. Сравните и сделайте выводы.

**Оценка коэффициента ангармоничности *В*.**

Таблица 3 – Коэффициент ангармоничности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Запись № | Измеренная частота *f*и, Гц | Коэффициент ангармоничности оберотонов *В*·10-4 |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. По полученным значениям таблицы 3 постройте зависимость *B*(*f*и), обозначьте точки значений и занесите её в отчет. Напишите выводы   
   по полученным результатам.

# Контрольные вопросы

1. Что такое квазипериодичность?
2. Какова причина отличия формы огибающей в положительной области   
   от огибающей в отрицательной области?
3. Поясните явление ангармонизма.
4. Почему в данной работе используется кепстральный анализ?
5. Какое влияние оказывает численное значение коэффициента ангармоничности *В* на вид реализации временной и спектральной характеристик?
6. Почему использована в массиве записей частота дискретизации *f*д = 44,1 кГц? Можно ли использовать частоту ниже или выше 44,1 кГц? На что и как это повлияет?

# ЛИТЕРАТУРА

**Основная**

1. **Белов Л. А.** Автоматизированные системы контроля и управления радиоэлектронными средствами. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007, с. 68 – 71.
2. **Белов Л. А. Семёнов Н. С.**Ангармонизм обертонов в сверхширокополосных квазипериодических сигналах. Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016, № 4 (24), с. 26 – 33.
3. **Белов Л. А., Семёнов Н. С., Первеева Н. С.** Формирование периодических колебаний с ангармонизмом обертонов. Вестник МЭИ, 2017, (в печати).
4. **Оппенгейм А., Шафер Р.**Цифровая обработка сигналов / пер.  
   с англ., Изд. 3-е, Москва, Техносфера, 2012. – 1048 с.

**Дополнительная**

1. **Стретт Дж. В. (лорд Рэлей)** Теория звука, Т.1. – М.: Государственное издательство Технико-теоретической литературы, 1955. – 503 с.
2. **Аскенфелт А., Галембо А.С.** Исследование спектральной негармоничности музыкального звука с помощью алгоритмов экстракции высоты // Акустический журнал. – 2000. – том 46. – №2. – с. 157 – 169.
3. **Белов Л. А., Семенов Н. С., Первеева Н. С.** Анализ квазипериодических сверхширокополосных акустических сигналов // Радиотехнические тетради. 2015, № 51, с. 64 – 68.
4. **Сорокин Б. П. и др**. Исследования многочастотных СВЧ акустических резонаторов на основе слоистой пьезоэлектрической структуры. Акустический журнал, 2015, том 61, № 4, с. 464 – 476.